

EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

Übungsblatt 12 (21.07.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE

Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179

Webpage der Vorlesung: www.qoqi.nat.fau.de → "teaching"

1) Kommutatorrelationen

Für die Bestimmung der Feinstrukturaufspaltung ist es wichtig, dass die Korrekturterme W_{rm} , W_{SO} und W_D gleichzeitig scharf meßbar sind, d.h. die entsprechenden Operatoren miteinander kommutieren. Die Korrekturterme sind proportional zu \hat{p}^4 , \hat{r} , \hat{L} und \hat{S} . In Übungsblatt 10 wurde gezeigt, dass \hat{L}^2 und \hat{L}_i miteinander kommutieren. Zeigen Sie nun, dass:

(a) $[\hat{L}_i, \hat{p}^2] = 0$ und, dass daraus folgt: $[\hat{L}^2, \hat{p}^2] = 0$.

(b) $[\hat{L}_i, \hat{r}] = 0$

(c) $[\hat{L}^2, \hat{r}] = 0$

(d) $[\hat{L}_i, \hat{S}] = 0$

(e) $[\hat{L}^2, \hat{S}] = 0$

(Hinweis: Verwenden Sie für Aufgabe (b) und (c) die Darstellung des Drehimpulsoperators im Ortsraum in Polarkoordinaten)

2) Drehimpuls-Basistransformation

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Elektronen im Atom sowohl einen Bahndrehimpuls (Quantenzahlen l , m_l) als auch einen Spin (Quantenzahlen s , m_s) besitzen. Die Eigenzustände des Bahndrehimpulses (genauer von \hat{L}^2 und \hat{L}_z) als auch des Spins (genauer von \hat{S}^2 und \hat{S}_z) spannen jeweils einen eigenen Zustandsraum auf. Die zugehörigen Observablen \hat{L} bzw. \hat{S} wirken dabei nur auf den entsprechenden Zustandsraum, wobei man die einzelnen Zustände $|l, m_l\rangle$ und $|s, m_s\rangle$ zum sogenannten Produktzustand $|l, m_l, s, m_s\rangle = |l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ zusammenfassen kann. Für die Betrachtung der Spin-Bahn-Wechselwirkung $\propto \vec{L} \cdot \vec{S}$ ist es jedoch von Vorteil, wenn ein Gesamtdrehimpuls $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ definiert wird, denn die Eigenzustände von \hat{J}^2 und J_z sind auch Eigenzustände von $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Leider sind die Produkt-Zustände $|l, m_l, s, m_s\rangle$ keine Eigenzustände von \hat{J} (genauer von \hat{J}^2 und \hat{J}_z). Man kann aber die Produktzustände $|l, m_l, s, m_s\rangle$ in eine neue orthonormale Basis transformieren, bei welcher die neuen Zustände $|l, s, j, m_j\rangle$ Eigenvektoren zu \hat{J}^2 und \hat{J}_z sind. Dies geschieht über die folgende Transformation:

$$|l, s, j, m_j\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_s} |l, m_l, s, m_s\rangle \langle l, m_l, s, m_s | l, s, j, m_j\rangle \quad (1)$$

Dabei kann m_j nur die folgenden Werte annehmen: $m_j = +j, j-1, \dots, -j+1, -j$, und es gilt $m_j = m_l + m_s$, d. h. die Summe in Glg. (1) geht nicht über alle möglichen Werte von m_l und m_s .

Die Elemente $\langle l, m_l, s, m_s | l, s, j, m_j \rangle$ heißen Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Bestimmen Sie die Basistransformation für ein Elektron

- (a) im 2s Zustand für $J = 1/2$ und $m_j = 1/2$,
- (b) im 2p Zustand für $J = 3/2$ und $m_j = 1/2$
- (c) im 2p Zustand für $J = 3/2$ und $m_j = -3/2$

(Hinweis: Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten brauchen Sie nicht zu berechnen. Eine Liste mit Clebsch-Gordan-Koeffizienten findet sich unter:

http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch%E2%80%93Gordan_coefficients

Eine ausführliche Herleitung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten findet sich unter:

<http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/~scheck/quanten/Vortrag9.pdf>

Achtung: vergewissern Sie sich, dass bei Eingabe dieser Web-Adresse ein Tilde-Zeichen vor "scheck" steht!

3) Spin-Bahn-Kopplung und Magnetfeld der Bahnbewegung

Der Spin-Orbit-Term der Feinstruktur ist für das Wasserstoffatom gegeben durch

$$\hat{W}_{\text{SO}} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 r^3} (\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}).$$

- (a) Schätzen Sie die Größenordnung von $\langle \hat{W}_{\text{SO}} \rangle$ ab. Überlegen Sie sich hierfür zunächst die Größenordnung von r . Verwenden Sie außerdem $|\langle \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}} \rangle| \leq |\langle \hat{\vec{S}} \rangle| \cdot |\langle \hat{\vec{L}} \rangle|$.
- (b) Warum rechtfertigt dies die Behandlung von $\langle \hat{W}_{\text{SO}} \rangle$ im Rahmen der Störungsrechnung?

$\langle \hat{W}_{\text{SO}} \rangle$ kann auch durch die vom Bahndrehimpuls am Ort des Elektrons erzeugte Feldstärke $\hat{\vec{B}}_L$ beschrieben werden: $\langle \hat{W}_{\text{SO}} \rangle = \langle \hat{\vec{\mu}}_S \cdot \hat{\vec{B}}_L \rangle = 2\mu_B/\hbar \langle \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{B}}_L \rangle$.

- (c) Schätzen Sie $\hat{\vec{B}}_L$ ab. Verwenden Sie hierfür $|\langle \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{B}}_L \rangle| \leq |\langle \hat{\vec{S}} \rangle| \cdot |\langle \hat{\vec{B}}_L \rangle| = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar |\langle \hat{\vec{B}}_L \rangle|$.
- (d) Wann gilt ein äußeres Magnetfeld folglich als klein?

(e) Das Magnetfeld, welches im Wasserstoffatom durch das Proton am Ort des Elektrons (im Zustand $n = 2$, $l = 1$) erzeugt wird, ist gegeben durch

$$\vec{B}_L = \frac{\mu_0 Ze}{8\pi m_e r^3} \vec{L}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle B_{L,z} \rangle$ der z -Komponente.

4) Feinstruktur bei wasserstoffähnlichen Ionen

Die Energieniveaus für wasserstoffähnliche Ionen (d. h. Ionen mit nur einem Elektron) sind nach Dirac unter Berücksichtigung der Feinstruktur durch folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned} E_{n,j} &= E_n + \Delta E_{\text{FS}} \\ &= E_n + \frac{E_n}{n} (\alpha Z)^2 \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right), \end{aligned}$$

mit den unkorrigierten Energieniveaus $E_n = -Ry hc \frac{Z^2}{n^2}$ und $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Korrekturterm ΔE_{FS} für keinen möglichen Wert der Quantenzahlen n und j verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung gegenüber dem unkorrigierten Energiewert E_n führt.

(b) In wie viele Energieniveaus spalten die Terme des einfach ionisierten Heliums, die zu den Hauptquantenzahlen $n = 3$ und $n = 4$ gehören, durch die Feinstrukturwechselwirkung auf?

(c) Skizzieren Sie die Lage dieser Niveaus relativ zu den unverschobenen Termen und geben Sie den Betrag der Verschiebung in Einheiten von $E_1 \alpha^2 Z^2$ an (E_1 bezeichnet die Energie der ersten Bohrschen Bahn im Helium-Atom). Tragen Sie Zustände mit verschiedenen Werten von n , l oder j getrennt ein.

(d) Optische Übergänge zwischen zwei Energieniveaus mit $\Delta n \neq 0$ durch Absorption und Emission eines Photons sind nur möglich, wenn die Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta j = 0, \pm 1$ erfüllt sind. Welche Übergänge von Energieniveaus mit $n = 4$ auf $n = 3$ sind erlaubt? Welche dieser Übergänge haben die gleiche Energiedifferenz?