EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

Übungsblatt 11 (14.07.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE
Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179
Webpage der Vorlesung: www.qoqi.nat.fau.de → ”teaching”

---

1) Das Wasserstoffatom

In dieser Aufgabe soll die Wellenfunktion für den Grundzustand des Wasserstoffatoms hergeleitet werden. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Problem lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r) - E\right)\psi(r,\theta,\phi) = 0,$$

wobei $V(r)$ das Coulombpotenzial und μ die reduzierte Masse eines Teilchens in diesem kugelsymmetrischen Potenzial darstellt.
(a) Geben Sie das Coulombpotenzial an.
(b) Schreiben Sie die Schödingergleichung in Kugelkoordinaten auf.
Hinweis: Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen $\hat{\vec{L}}^2$ und dem Winkelanteil des Laplaceoperators,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2\hbar^2}.$$

(c) Zeigen Sie, dass mit dem Produktansatz $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\cdot Y_l^m(\theta,\phi)$ eine Gleichung für die Radialfunktion $R(r)$ gefunden werden kann. Wann darf man allgemein einen solchen Separationsansatz mit Radial- und Winkelanteil der Wellenfunktion verwenden?
Hinweis: Benutzen Sie die Eigenwertgleichung

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)Y_l^m(\theta,\phi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi).$$

(d) Geben Sie die asymptotische Lösung für $R(r)$ an, d.h. die Lösung für $R(r)$ im Grenzfall $r \to \infty$. Vernachlässigen Sie dafür in (c) die Terme mit $1/r$ und $1/r^2$. Welche der beiden Lösungen ist für gebundene Zustände physikalisch?
(e) Verwenden Sie für die allgemeine Lösung den Ansatz $R(r) = u(r)\cdot\exp(-\kappa r)$ und setzen Sie diesen in die Gleichung für den Radialteil aus Aufgabenteil (c) ein. Wählen Sie außerdem zur Lösung für $u(r)$ den Potentzreihenansatz

$$u(r) = \sum_j b_j r^j$$

und finden Sie für die Koeffizienten b_j eine Rekursionsformel.
(f) Die nach der Hauptquantenzahl $n \geq 1$ klassifizierten Lösungen werden durch die Abbruchbedingung für die Potenzreihe, $b_{n-1} \neq 1$ und $b_n = 0$, festgelegt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbruchbedingung die Energieeigenwerte E_n zur jeweiligen Hauptquantenzahl n.

2) Der Grundzustand des Wasserstoffatoms

Der Grundzustand eines Elektrons im Wasserstoffatom besitzt folgende Wellenfunktion:

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\, e^{-r/a_0}.$$

Dabei bezeichnet der erste Index der Wellenfunktion die Hauptquantenzahl n, der zweite Index die Drehimpuls- bzw. Nebenquantenzahl l und der dritte Index die magnetische Quantenzahl m.
(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $W(r)\mathrm{d}r$, mit der sich ein Elektron in der Kugelschale zwischen r und $r + \mathrm{d}r$ befindet.
(b) Für welches r wird $W(r)\mathrm{d}r$ maximal?
(c) Betrachten Sie den Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_z \rangle$ und $\langle \hat{L}_z^2 \rangle$ und die Varianz der z-Komponente des Drehimpulses $\langle \hat{L}_z^2 \rangle - \langle \hat{L}_z \rangle^2$. Diskutieren Sie das Ergebnis.
(d) Vergleichen Sie den errechneten Wert aus Aufgabenteil (b) mit dem Abstand von Elektron und Atomkern im Bohrschen Atommodell. Was ist der grundlegende Unterschied der beiden Modelle?

3) Stern-Gerlach-Versuch

Nichtrelativistische Silberatome im Grundzustand fliegen durch ein inhomogenes Magnetfeld, dessen Gradient $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$ senkrecht zur anfänglichen Flugrichtung steht.
(a) Wie lautet die Elektronenkonfiguration von Silber im Grundzustand?
(b) Zeigen Sie: Nachdem die Atome die Strecke L im Magnetfeld durchlaufen haben, ist der Atomstrahl senkrecht zu seiner Ausbreitungsrichtung in zwei Teilstrahlen im Abstand d aufgespalten mit $\frac{d}{2} = \frac{\mu_B L^2}{4E_{\mathrm{kin}}} \cdot \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$.
(E_{kin}: kinetische Energie der Atome, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{e}}}$: Bohrsches Magneton).
Hinweis: Auf ein magnetisches Spinmoment $\vec{\mu}$ wirkt im inhomogenen Magnetfeld $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$ die Kraft $F_z = \mu_{s,z}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$.
(c) Die Atome haben eine Geschwindigkeit von $v = 555\,\mathrm{m/s}$, L sei $0{,}05\,\mathrm{m}$. Wie groß muss $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$ sein, damit der Strahl sich um $\frac{d}{2} = 1\,\mathrm{mm}$ aufspaltet?
(d) Warum gelingt der Stern-Gerlach-Versuch nicht oder nur sehr schwer mit freien Elektronen?

4) Einstein-de-Haas Effekt

Das gyromagnetische Verhältnis γ_s des freien Elektrons, also das Verhältnis von magnetischem (Dipol-) Moment des Elektrons $\vec{\mu}_s$ zum Elektronenspin $\vec{s}$, gegeben durch $\vec{\mu}_s = \gamma_s \vec{s}$, lässt sich experimentell durch einen Versuch bestimmen, der ursprünglich von Albert Einstein vorgeschlagen wurde, um die Ursache des Magnetismus zu ergründen. Er wurde von Wander Johannes de Haas 1915 durchgeführt.
(a) Berechnen Sie zuerst das gyromagnetische Verhältnis γ_l für eine klassische Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt.
Bemerkung: Das so erhaltene klassische Resultat für den Zusammenhang zwischen magnetischem Moment der Bahnbewegung $\vec{\mu}_l$ und Bahndrehimpuls $\vec{L}$ behält auch in der Quantenmechanik seine Gültigkeit.

Zur Bestimmung des gyromagnetischen Verhältnisses des freien Elektrons γ_s soll nun der dargestellte Versuchsaufbau verwendet werden (siehe Abbildung): Ein magnetisierter Stahlzylinder (Masse $m_z = 62,5\,\mathrm{g}$, Radius $r_Z = 2,5\,\mathrm{mm}$, Dichte $\rho_Z = 7874\,\mathrm{kg/m^3}$, Magnetisierung (= magnetisches Moment pro Volumen) $M = 1,2 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m}$) hängt an einem Draht (Länge $l_D = 40\,\mathrm{cm}$, Durchmesser $d_D = 20\,\mu\mathrm{m}$, Torsionsmodul $G = 40\,\mathrm{GPa}$). Ein Lichtstrahl wird von einem direkt über der Probe montierten Spiegel auf eine Messskala reflektiert. Diese befinde sich in einer Entfernung von $d = 2,5\,\mathrm{m}$.

(b) Schlagen Sie die sog. Richtgröße des Drahtes nach, d.h. das Verhältnis von Rückstellmoment und Winkel bei Verdrillung. Wie berechnet sich daraus die potentielle Energie bei Verdrillung des Drahtes um den Winkel ϕ?

(c) Zu Beginn des Experiments wird die Magnetisierung des Zylinders mit Hilfe der gezeigten Spule durch Umpolen der Spannung U_0 umgekehrt. Beschreiben Sie die resultierende Bewegung des Zylinders. Der Lichtpunkt bewege sich auf der Skala um $\Delta x = 3,10\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie mit diesen Angaben γ_s.

(d) Vergleichen Sie die beiden gyromagnetischen Verhältnisse γ_l und γ_s. Um welchen Faktor unterscheiden sie sich?