EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

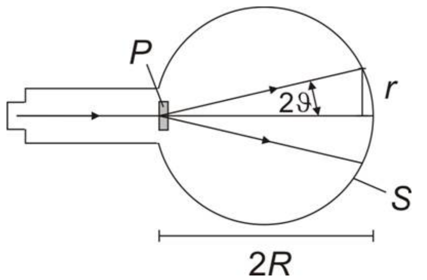
Übungsblatt 7 (16.06.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE
Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179
Webpage der Vorlesung: www.qoqi.physik.uni-erlangen.de → "teaching"

---

1) Elektronenbeugung

Ein Elektronenbündel durchstrahlt nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung von U = 10kV eine polykristalline Graphitaufdampfschicht (Probe P), wobei der auf dem kugelförmigen Leuchtschirm S beobachtete Interferenzring der ersten Beugungsordnung einen Radius r = 1,29 cm aufweist (vgl. Bild rechts). Der Abstand der Probe zum Leuchtschirm beträgt 2R = 13 cm.



(a) Leiten Sie generell einen Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ, dem Netzebenenabstand d eines Kristalls und dem Winkel ϑ her, der das Auftreten von Beugungsmaxima beschreibt.
(b) Wie groß ist der Abstand d der entsprechenden Netzebenen des Graphitkristalls?
(c) Bis zu welcher Beugungsordnung n können prinzipiell bei der gegebenen Beschleunigungsspannung konstruktive Interferenzen auftreten?

2) de-Broglie-Wellenlänge

Eine besondere Form von Kohlenstoff ist das C_{60} Molekül ("'Buckyball"'), bei dem sich sechzig ^{12}C Atome zu Fünf- und Sechsecken so anordnen, dass sich die Struktur eines Fußballs ergibt. Die Moleküle werden nun in einem Ofen erhitzt und treten als kollimierter Molekülstrahl aus dem Ofen aus. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit der Moleküle 186 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt.
(a) Wie groß ist die entsprechende de Broglie-Wellenlänge der Buckyballs?
(b) Der kollimierte Molekülstrahl wird an einem Gitter mit der Periode 100 nm gebeugt. Unter welchen Winkeln erwarten Sie Beugungsmaxima?
(c) Das durchschnittliche Gewicht eines Fußballs beträgt etwa 430 g. Berechnen Sie seine de-Broglie-Wellenlänge, wenn er bei einem Elfmeter wie von Arturo Vidal (Bayern München) am 12.4.2017 (gegen Real Madrid) mit ca. 80 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ am Tor vorbei fliegt.

3) Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in Wellenpaketen

(a) Geben Sie allgemein die Formeln für die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit für Wellenpakete an, die in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz $\omega(k)$ und der Wellenzahl k beschrieben werden.

(b) Welches Frequenzspektrum muss ein Wellenpaket haben, damit man von einer Gruppengeschwindigkeit reden kann? Kann man bei Überlagerung zweier Frequenzen schon von einem Wellenpaket sprechen?
(c) Wie lautet der Zusammenhang von Energie und Impuls (E, p) und (ω, k) bei Materiewellen von freien Teilchen?
(d) Zeigen Sie für ein relativistisches Teilchen, dass die Teilchengeschwindigkeit gleich der Gruppengeschwindigkeit der zugeordneten Materiewelle ist.

4) Dispersion für Gaußsche Wellenpakete

Betrachten Sie eine zeitabhängige komplexe Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ mit einer allgemeinen Dispersionsbeziehung $\omega = \omega(k)$, die als Überlagerung ebener Wellen $\Phi_k(x,t) = e^{ikx - i\omega(k)t}$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx - i\omega(k)t} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(k-k_0)^2}$$

(a) Bestimmen Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$, die Gruppengeschwindigkeit $v = \omega' = \partial_{k'}\omega(k')|_k$ und die Dispersion $\omega'' = \partial_{k'}^2\omega(k')|_k$ für elektromagnetische Wellen. Beachten Sie, dass für elektromagnetische Wellen die Wellengleichung gilt:

$$\partial_t^2 \Phi_k(x,t) = c^2 \partial_x^2 \Phi_k(x,t)$$

(b) Nehmen Sie an, dass $\omega(k)$ über den Bereich der in der Wellenfunktion relevanten Wellenzahlen $k \in [k_0 - \frac{1}{\sigma}, k_0 + \frac{1}{\sigma}]$ nur schwach variiert. Benutzen Sie die Entwicklung

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega' + \frac{(k-k_0)^2}{2}\omega''$$

und berechnen Sie damit die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ explizit. Ist diese Nährung für die Dispersionsbeziehung in Teilaufgabe (a) exakt? (Hinweis $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$)
(c) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion zu jeder Zeit t auf 1 normiert ist.
(d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen sich zur Zeit t am Ort x befindet, ist durch $w(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx$ gegeben. Berechnen Sie die Mittelwerte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\langle x \rangle$ und der Geschwindigkeit $\langle v \rangle = \frac{d\langle x \rangle}{dt}$ des Teilchens.
(e) Betrachten Sie ihre Lösung für $\Psi(x,t)$ aus Teilaufgabe (b) und geben Sie die Breite Δx der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Was können Sie über die Ausbreitung des Wellenpakets sagen? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Maximum von $|\Psi(x,t)|$? Was beschreibt ein solches Wellenpaket?
(f) Berechnen Sie zur Zeit $t = 1$ s die Ortsunschärfe Δx für ein nicht-relativistisches Elektron, welches zur Zeit $t = 0$ eine Ortsunschärfe von $\Delta x = 1$ Åbesitzt. Beachten Sie dabei, dass für das freie Teilchen gilt:

$$E = E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$