EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

Übungsblatt 6 (09.06.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE
Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179
Webpage der Vorlesung: www.qoqi.physik.uni-erlangen.de → "teaching"

Achtung: Am 27. und 28. Juni findet wieder die alljährliche Hochschulwahl statt. Wer an diesen Tagen verhindert ist oder schon vorab wählen möchte, kann die Option der Briefwahl nutzen. Der entsprechende Antrag ist zu finden auf mein campus → Bescheinigungen → Wahlbenachrichtigung (auf dieser ist auch das zugeordnete Wahllokal genannt; für Studierende der Physik: Physikum/Biologikum, für Lehramtsstudierende hängt das Wahllokal von der Fächerkombination ab). Ausgefüllte Anträge können bis zum 12. Juni auch in den Briefkasten der FSI Mathe/Physik (gegenüber vom CIP) eingeworfen werden, diese gibt alle Anträge dann gesammelt ab.

1) Spezifische Wärme der Hohlraumstrahlung

Berechnen Sie unter Verwendung des Resultats von Aufgabe 4a) vom letzten Aufgabenblatt 5 die Wärmekapazität bei konstantem Volumen $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}|_V$ von einem Kubikmeter Vakuum bei Raumtemperatur. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert für Stickstoff (N_2, $\rho = 1,14$kg/m^3) bei Raumtemperatur und Normaldruck p$_n$ = 1013 hPa. Benutzen Sie dafür, daß für N Teilchen eines zweiatomigen Gases gilt $U = \frac{5}{2}Nk_BT$. Bei welcher Teilchendichte sind die beiden Wärmekapazitäten gleich groß? Wie hoch ist der Druck bei dieser Teilchendichte?

2) Planck´sche Strahlungsleistung nach Einstein

Max Planck ordnete 1900 den Schwingungen des elektromagnetischen Feldes diskrete Energiewerte zu. Dies war zunächst ein mathematisches Konstrukt zur Erklärung der experimentellen Ergebnisse. Einstein ging mit der Erklärung des Photoeffekts einen Schritt weiter und ordnete den Planck'schen Energiequanten ein real existierendes Teilchen, das sogenannte Photon, zu. Er postulierte damit, dass Licht aus Teilchen besteht, d.h. dass zu jeder Lichtwelle der Frequenz ν eine Anzahl von Photonen mit der Energie $E = h\nu$ und dem Impuls $p = E/c = h/\lambda$, d.h. vektoriell $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, gehören. 1917 leitete er das Plancksche Strahlungsgesetz aus der Annahme her, dass sich das Licht eines schwarzen Körpers im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden des schwarzen Körpers befindet, in denen die Atome diese Photonen absorbieren bzw. emittieren können. Die Atome besitzen dabei zwei diskrete Energieniveaus E_1 und E_2, mit $\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$.
Einstein nahm an, dass die elektromagnetische Strahlung durch drei Prozesse mit der Materie wechselwirkt:
(i) Absorbtion eines Photons, durch die ein Elektron aus dem niedrigeren Energieniveau E_1 in das obere Energieniveau E_2 transferiert wird;
(ii) spontane Emission eines Photons: Hier geht ein Elektron nach einer gewissen Zeit im oberen Niveau E_2 (der sog. natürlichen Lebensdauer) spontan in das tiefere Energieniveau E_1 über, bei gleichzeitiger Emission eines Photons.

(iii) stimulierte Emission: Hier erzwingt ein ankommendes Photon den Übergang eines Elektrons vom höheren Energieniveau E_2 in das tiefere Energieniveau E_1 unter Aussendung eines zweiten Photons. Dieser Prozess wurde von Einstein neu postuliert.

Gegeben sei ein System von N Atomen, von denen N_1 ein Elektron in E_1 und N_2 ein Elektron in E_2 besitzen (mit $N_1 + N_2 = N$), im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung.
(a) Nehmen sie zunächst unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten für die Absorption (B_{12}), die spontane Emission (A_{21}) und die stimulierte Emission (B_{21}) eines Photons an (dies sind die sog. Einsteinkoeffizienten). Welche der drei Prozesse hängen von der Energiedichte ab und welche nicht? Stellen sie damit die Ratengleichungen für die Übergangsrate $\dot{N}_{12}$ vom Energieniveau E_1 zum Energieniveau E_2 bzw. die Übergangsrate $\dot{N}_{21}$ vom Energieniveau E_2 zum Energieniveau E_1 in Abhängigkeit der spektralen Energiedichte $u(\nu)$ und der Anzahl der Atome im Niveau E_i (i=1,2) auf.
(b) Einstein nahm an, dass die Anzahl der Atome mit einem Elektron im Niveau E_1 bzw. E_2 einer Boltzmann-Verteilung genügt, d.h. $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$. Im thermischen Gleichgewicht muss weiterhin gelten: $\dot{N}_{12} = \dot{N}_{21}$. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für $u(\nu)$ ab.
(c) Einstein forderte weiterhin, dass $u(\nu) \to \infty$ für $T \to \infty$. Was folgt daraus für die beiden Übergangswahrscheinlichkeiten der Absorption B_{12} bzw. der stimulierte Emission B_{21}?
(d) Andererseits muss für niedrige Frequenzen ($h\nu << k_B T$) wieder das Rayleigh-Jeans-Gesetz gelten:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

Zeigen sie durch Entwickeln der Exponentialfunktion in (c) bis zur 1. Ordnung in $\frac{h\nu}{kT}$, dass damit für $u(\nu)$ das Planck´sche Strahlungsgesetz resultiert.

3) Laserkühlung

Wie in 2) erwähnt, postulierte Einstein, dass Photonen neben der Energie $h\nu$ auch den Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ besitzen. Durch Absorption von vielen Photonen aus einer Richtung, z.B. aus einem Laserstrahl, sollte damit eine Kraft auf ein Atom ausgeübt werden können. Um diese zu berechnen, betrachten wir ein einzelnes Atom, auf das eine ebene Lichtwelle (z.B. ein stark aufgeweiteter Laserstrahl) auftrifft. Die Rate, mit der das Atom Photonen aus dem Lichtstrahl absorbiert, beträgt:

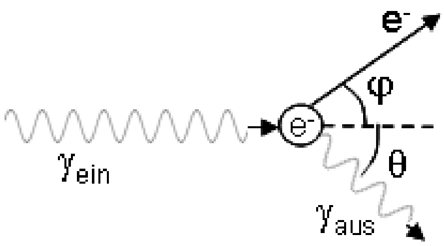
$$\dot{N} = \frac{A}{2} \frac{s_0}{(2\delta/\gamma)^2 + 1 + s_0},$$

wobei $A = \gamma$ der Einstein-Koeffizient für die spontane Emission ist (d.h. die Rate beschreibt, mit der Photonen spontan vom oberen Niveau emittiert werden), $s_0 = I/I_0$ (mit $I_0 =$ const. der von der Atomsorte abhängigen Sättigungsintensität), und $\delta = \omega_\mathrm{L} - \omega_0$ die Verstimmung der Laserfrequenz ω_L bezüglich der atomaren Resonanzfrequenz ω_0 .
(a) Berechnen Sie die Lichtdruck-Kraft, die ein ruhendes Atom durch Impulsübertrag bei der *Absorption* der Photonen erfährt. Überlegen Sie sich auch, welche Kraft das Atom im Mittel durch die Emissionsprozesse erfährt.
(b) Betrachten Sie jetzt ein Atom, das sich zwischen zwei entgegengesetzt gerichteten Laserstrahlen gleicher Frequenz ω_L befindet. Das Atom bewegt sich mit der Geschwindigkeit v auf einen der Laser zu und entsprechend vom anderen Laser weg. Wir betrachten nur die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Laserstrahlen. Ersetzen Sie in der Formel oben die Verstimmung δ durch die *effektive* Verstimmung $\delta = \delta \pm kv$, die das Atom aufgrund des Doppler-Effekts erfährt. Addieren Sie dann die Kräfte, die die beiden Laser auf das Atom ausüben. Hinweis: ein einfaches Addieren der Kräfte, um daraus die resultierende Gesamt-Lichtdruckkraft zu ermitteln,

ist nur im Limit $s_0 << 1$ möglich, denn nur dann kann der Einfluss der beiden Lichtstrahlen auf das Atom als unabhängig voneinander angenommen werden.
(c) Nehmen Sie jetzt an, dass die Geschwindigkeit klein ist, so dass $kv \ll \delta$. Damit können Sie die Formel für die resultierende Lichtdruck-Kraft so vereinfachen, dass sie die Form einer Reibungskraft erhält $F = -\alpha\, m\, v$, mit m der Masse des Atoms (Hinweis: m wird ganz am Ende eingeführt). Wie lautet α?
(d) Wie müssen Sie die Laserstrahlen verstimmen, um eine Reibungskraft und damit eine Abbremsung und Kühlung des Atoms zu erreichen?
(e) Wie können Sie ein Atom in allen drei Dimensionen kühlen?

4) Compton-Streuung

Wird monochromatische Röntgenstrahlung an (quasifreien) Elektronen gestreut, vergrößert sich die Wellenlänge. Die Wellenlänge der Streustrahlung ist umso größer, je größer der Streuwinkel θ ist. Dieser Effekt kann als Resultat eines direkten elastischen Stoßes zwischen einem Photon und einem Elektron beschrieben werden (s. Skizze). Ist die Bindungsenergie eines Elektrons in einem Metall klein gegenüber der Photonenenergie, kann das Elektron als quasifrei betrachtet werden. In diesem Fall ergibt sich aus dem Energie- und Impulserhaltungssatz folgende Beziehung für die Änderung der Wellenlänge der gestreuten Photonen in Abhängigkeit vom Streuwinkel (Compton-Streuformel):



$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

mit $\lambda_C = \frac{h}{m_0 c}$ der Compton-Wellenlänge des Elektrons.
(a) Berechnen Sie λ_C.
(b) Wie groß sind die Energie und die Wellenlänge einfallender Photonen, wenn unter einem Streuwinkel von $\theta = 90°$ der Wellenlängenunterschied von einfallenden und gestreuten Photonen 2% beträgt?
(c) Wie groß ist der maximal erreichbare Wellenlängenunterschied? Unter welchem Streuwinkel wird dieser gemessen? Wie groß ist in dem Fall der Impulsübertrag auf das Elektron?
(d) Leiten Sie unter Verwendung der Compton-Streuformel eine Beziehung für die kinetische Energie des Elektrons in Abhängigkeit vom Streuwinkel des gestreuten Photons ab.
(e) Ein Röntgenquant der Wellenlänge 0,102 nm wird an einem Elektron um den Winkel $\theta = 77°$ gestreut. Welchen Energiebetrag nimmt das Elektron auf? Unter welchem Winkel Φ gegenüber der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Röntgenphotons bewegt sich das Elektron?