EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

Übungsblatt 9 (30.06.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE
Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179
Webpage der Vorlesung: www.qoqi.nat.fau.de → "teaching"

---

1) Geladenes Teilchen im eindimensionalen elektrischen Potenzial

Ein geladenes Teilchen unterliege im Bereich $0 \leq x \leq \infty$ folgendem Hamiltonian:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{q^2}{x}, \qquad (q = constant).$$

Eine Eigenfunktion für dieses Problem lautet

$$\psi(x) = Axe^{-\alpha x}, \qquad \alpha \equiv mq^2/\hbar^2, \qquad A = constant.$$

a) Schreiben Sie die Schrödinger Gleichung für dieses System und führen Sie die entsprechenden Ableitungen durch.
b) Finden Sie die zugehörigen Energie-Eigenwerte (ausgedrückt in $\hbar$, m und q).
c) Berechnen Sie den Wert von A, so dass die Wellenfunktion normiert ist

$$\int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Folgende bestimmte Integrale mögen dabei hilfreich sein:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

2) Impulsoperator

Im Folgenden untersuchen wir, durch welche Wahrscheinlichkeitsdichte die Realisierung bestimmter Impulswerte quantenmechanisch beschrieben wird. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ im Volumen $d^3\vec{x}$ zu finden, sei mit $|\psi(\vec{x})|^2 d^3\vec{x}$ bezeichnet. Entsprechend sei die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ im Intervall $d^3\vec{p}$ anzutreffen, mit $|c(\vec{p})|^2 d^3\vec{p}$ bezeichnet.
(a) Stellen Sie $\psi(\vec{x})$ als kontinuierliches Fourierspektrum der Impulswellenfunktion $c(\vec{p})$ dar.
(b) Zeigen Sie, dass das *Parsevalsche Theorem* für Funktionen gilt, die zueinander durch eine Fouriertransformation in Beziehung stehen, d.h. dass gilt:

$$\int d^3\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2 = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} |c(\vec{p})|^2$$

(c) Berechnen Sie nun den Mittelwert des Impulses $\langle\vec{p}\rangle$ im *Ortsraum*. Ersetzen Sie dazu die Impulswellenfunktion $c(\vec{p})$ durch ihre Fourierdarstellung.
(d) Wie lautet folglich der *Operator*, der sich daraus für den Impuls im Ortsraum ergibt?

3) Matrixdarstellung von Operatoren

Der dreidimensionale Zustand eines physikalischen Systems werde von der orthonormierten Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ aufgespannt. Der Hamilton-Operator $\hat{H}$ und eine weitere Observable $\hat{A}$ seien in dieser Basis:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |u_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei ω_0 und a reelle positive Konstanten sind. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\psi(0)\rangle$ normiert ist.
(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ misst man die Energie des Systems. Welche Werte können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\bar{E} = \langle\hat{H}\rangle = \langle\psi(0)|\hat{H}|\psi(0)\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$, und die Standardabweichung $\Delta E = \sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2}$.
(c) Statt $\hat{H}$ misst man zum Zeitpunkt $t = 0$ die Observable $\hat{A}$. Welche Werte von $\hat{A}$ können mit welcher Wahrscheinlichkeit gemessen werden? In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung?
(d) Berechnen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ des Systems zur Zeit t für den Fall, dass keine Messung vorgenommen wurde.

4) Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die untere Grenze der Heisenbergschen Unschärferelation kann zurückgeführt werden auf die Vertauschungsrelation zweier zueinander konjugierter Observablen A und B, welche auf eine beliebige Wellenfunktion $|\psi\rangle$ wirken.
(a) Wie ist die Standardabweichung (bzw. Varianz) des Erwartungswertes eines Operators A definiert?
(b) Das Produkt zweier Varianzen lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $\langle g|g\rangle\langle f|f\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$ und der Tatsache, dass für alle komplexen Zahlen gilt: $|z|^2 = Re\{z\}^2 + Im\{z\}^2 \geq Im\{z\}^2 = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^*)\right)^2$, weiter vereinfachen. Wählt man als Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ und setzt die aus der Quantenmechanik bekannte Vertauschungsrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ zwischen den beiden Operatoren ein, so erhält man die Heisenbergsche Unschärferelation.
Tip: Beachten Sie, dass Observablen immer hermitesch sind, dass also gilt $\langle\psi|A\psi\rangle = \langle A\psi|\psi\rangle$.