EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

Übungsblatt 5 (02.06.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE
Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179
Webpage der Vorlesung: www.qoqi.physik.uni-erlangen.de → "teaching"

---

1) Photoeffekt

Wird hinreichend kurzwelliges Licht auf eine Metalloberfläche gestrahlt, können aus dieser Elektronen austreten. Diesen Effekt nennt man Photoeffekt oder auch lichtelektrischen Effekt. Die maximale kinetische Energie eines beim Photoeffekt freiwerdenden Elektrons berechnet sich aus der Differenz der Energie des einfallenden Photons $h\nu$ und der Austrittsarbeit W_A (dies ist die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um das Elektron aus dem Metall zu entfernen):

$$E_\mathrm{kin} = h\nu - W_\mathrm{A}$$

(a) Warum werden im Experiment auch Photoelektronen mit einer geringeren kinetischen Energie detektiert?
(b) Licht der Wellenlänge 300 nm fällt auf eine Kaliumoberfläche. Die emittierten Elektronen haben eine maximale kinetische Energie von 2,03 eV. Wie groß ist die Austrittsarbeit? Welche Wellenlänge muss das Licht haben, so dass Photoelektronen austreten?
(c) Die kinetische Energie der Photoelektronen kann mit Hilfe einer Gegenspannung gemessen werden. Welche Spannung ist mindestens nötig, um die austretenden Elektronen vollständig abzubremsen, wenn die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts 250 nm beträgt?

2) Hohlraumstrahlung klassisch und quantal

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in einem Hohlraum nur bestimmte stationäre Eigenschwingungen des elektromagnetischen Feldes existieren können, die die *Moden* des Hohlraums genannt werden. Für die spektrale Modendichte wurde hierbei folgender Ausdruck hergeleitet:

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

(a) Betrachten Sie zunächst jede Mode ν des Hohlraums als klassisches System mit einem Freiheitsgrad, welches als Energie die kontinuierlichen Werte $E \in [0, \infty)$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mode die Energie E besitzt, ist hierbei durch den Boltzmann-Faktor $e^{-\beta W}$ gegeben, mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\bar{W}_{klass.}(\nu)$ einer Mode ν für diesen klassischen Fall:

$$\bar{W}_{klass.}(\nu) = \frac{\int_0^\infty dE\, E\, e^{-\beta E}}{\int_0^\infty dE\, e^{-\beta E}}$$

(b) Berechnen Sie nun den Erwartungswert der Energie $\bar{W}_{qu.}(\nu)$ einer Mode im quantisierten Fall, in dem für jede Mode ν nur die Energien $E_n = nh\nu$ mit $n \in \mathbb{N}$ erlaubt sind (h=Planksches Wirkungsquantum):

$$\bar{W}_{qu.}(\nu) = \frac{\sum\limits_0^\infty E_n e^{-\beta E_n}}{\sum\limits_0^\infty e^{-\beta E_n}}$$

(c) Betrachten Sie für beide Fälle den Grenzfall hoher Temperatur und skizzieren Sie den Verlauf von $\bar{W}_{klass.}$ und $\bar{W}_{qu.}$ in Abhängigkeit von ν.
(d) Geben Sie die spektrale Energiedichte

$$u(\nu)d\nu = n(\nu)\bar{W}(\nu)d\nu$$

im klassischen und im quantenmechanischen Fall an. Skizzieren Sie die klassische und quantenmechanische spektrale Energiedichte für zwei unterschiedliche Temperaturen. Zeigen Sie, dass die quantenmechanische spektrale Energiedichte für große Temperaturen ($\hbar\omega \ll k_B T$) mit der klassischen übereinstimmt.

3) Wien'sches Verschiebungsgesetz

Betrachten Sie die spektrale Energiedichte $u(\nu)d\nu$ (Energie pro Frequenzintervall pro Volumen) eines Hohlraums für den quantenmechanischen Fall, d.h. wie von Planck hergeleitet (s. Aufgabe 2d)).
(a) Berechnen Sie die Frequenz und die Wellenlänge, bei der $u(\nu)d\nu$ maximal ist. Beachten Sie, dass die erhaltene Gleichung nicht analytisch gelöst werden kann. Lösen Sie die Gleichung deshalb entweder numerisch oder graphisch.
(b) Im Vergleich mit experimentellen Messungen ist es oft sinnvoll, eine auf die Wellenlänge bezogene Energiedichte (Energie pro Wellenlängenintervall pro Volumen) zu betrachten: $u(\lambda)d\lambda$. Schreiben Sie die spektrale Energiedichte $u(\nu)d\nu$ auf $u(\lambda)d\lambda$ um.
(c) Leiten Sie nun das Wiensche Verschiebungsgesetz $\lambda_m \cdot T = 2,90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$ her. Hierbei bezeichnet λ_m die Wellenlänge, bei der $u(\lambda)d\lambda$ maximal ist.
(d) Von welchen Parametern - wenn überhaupt - sind die Maxima ν_{max} und λ_{max} abhängig? Begründen Sie, warum Sie in Aufgabenteil a) und c) verschiedene Ergebnisse für die maximierende Wellenlänge erhalten.
(e) Die Oberflächentemperatur der Sonne beträgt etwa 5800 K. Bei welcher Wellenlänge hat die Strahlung der Sonne die maximale Leistung im Wellenlängenspektrum? Bei welcher Wellenlänge hat diese Strahlung die maximale Leistung im Frequenzspektrum? Welchen Farben entsprechen diese Wellenlängen?
(f) Der Glühfaden einer Glühbirne ist $T \approx 2800$K heiß. Wo liegt λ_{max} im Vergleich zum sichtbaren Licht? Schätzen Sie demnach Glühbirnen als für die Beleuchtung besonders geeignet ein?

4) Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz

Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz gibt an, welche gesamte Strahlungsleistung P ein Schwarzer Körper von einer Einheitsfläche bei der absoluten Temperatur T emittiert. Dieses soll hier hergeleitet werden.
(a) Bestimmen Sie zunächst aus der Planck'schen Strahlungsformel für die spektrale Energiedichte $u(\nu, T)$ (s. Aufgabe 2d)) die über alle Frequenzen integrierte gesamte Energiedichte $u(T)$.
Tipp: Bei der Integration über alle Frequenzen erhalten Sie mit der Substitution $\nu = \frac{kT}{h}x$ ein Integral der Form $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$. Um dieses zu lösen, zeigen Sie zunächst, dass allgemein gilt:

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = n!\zeta(n+1) \tag{1}$$

mit n $\in \mathbb{N}$, wobei $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ die Reihendarstellung der Riemann'schen Zetafunktion ist (mit $s \in \mathbb{C}$ und $Re(s) > 1$). Um Glg. (1) zu zeigen, drücken Sie den Bruch $\frac{1}{e^x - 1}$ mit Hilfe der geometrischen Reihe aus und finden Sie anschließend eine Rekursionsformel für Integrale der Art $\int x^n e^{mx} dx$. Einige Werte der Riemann'schen Zetafunktion für reelle, geradzahlige s lauten: $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ und $\zeta(6) = \pi^6/945$.

(b) Die richtungsabhängige Strahlungsleistung ist definiert als abgestrahlte Leistung pro Einheitsfläche pro Raumwinkel

$$S(T, \vartheta) d\Omega = c \cdot u(T) \cos\vartheta \frac{d\Omega}{4\pi},$$

mit ϑ dem Winkel zur Normalen der Einheitsfläche, c der Lichtgeschwindigkeit und $u(T)$ der gesamten Energiedichte aus Aufgabenteil a). Wenn Sie $S(T, \vartheta)$ über den Halbraum oberhalb der abstrahlenden Fläche integrieren, erhalten Sie das gesuchte Gesetz.

(c) Die Solarkonstante, also die eintreffende Strahlungsleistung der Sonne auf die Erde pro Quadratmeter, ist ein wichtiger Faktor, z.B. bei der Erstellung von Klimamodellen. Sie sollte daher sehr genau bestimmt werden. Das Sonnenspektrum hat im grünen Licht sein Maximum ($\lambda_{\text{max}} = 498$nm). Bestimmen Sie die Solarkonstante.