EP-4 Atom- und Molekülphysik
Universität Erlangen–Nürnberg
SS 2017

Übungsblatt 3 (19.05.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE
Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179
Webpage der Vorlesung: www.qoqi.nat.fau.de → ”teaching”

---

1) Elektronenschwingungen im Thomson-Modell

(a) Berechnen Sie für das Thomsonsche Atommodell die Frequenz der kollektiven Schwingung der Elektronen im Atom (Plasmafrequenz) für Wasserstoff ($Z = 1$) und Gold ($Z = 79$).
(Zusätzliche Angabe: Durchmesser Wasserstoffatom: $d_w = 10^{-10}$; Gold: $d_g = 2 \cdot 10^{-10}$.)
(b) Vergleichen Sie die für Wasserstoff berechnete Frequenz mit den experimentell beobachteten Wasserstoffspektren, z.B. der Lyman- und Balmer-Serie (Literaturrecherche).

2) Zufallsbewegung und Thomson-Streuung

Ein bekanntes Beispiel für die zufällige Bewegung eines Objekts ist der betrunkene Seemann, der sich entlang einer Achse jeweils mit der gleichen Schrittlänge in eine zufällige Richtung - mal nach links, mal nach rechts - bewegt. Der Mann soll sich, statt nach dem Barbesuch nach Hause zu gehen, in der genannten Weise fortbewegen.
(a) Auf dieses Problem lässt sich die Binomialverteilung anwenden: Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Anzahl von insgesamt N Schritten n_r Schritte nach rechts zu machen, ist

$$W(n_r) = \binom{N}{n_r} p^{n_r}(1-p)^{N-n_r} = \binom{N}{n_r} p^{n_r} q^{N-n_r} = \frac{N!}{n_r!(N-n_r)!} p^{n_r} q^{N-n_r} ,$$

wobei p und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts bzw. nach links sind.
Gesucht ist die Varianz der Nettobewegung $m = n_r - n_l$ des Seemanns nach $N = n_r + n_l$ Schritten.
Zu deren Berechnung kann man folgendermaßen vorgehen:
(i) Berechnen Sie zunächst die mittlere Anzahl der Schritte nach rechts, d. h. $\overline{n}_r = \sum_{n_r=0}^{N} n_r W(n_r)$, und damit dann die mittlere Anzahl der Schritte nach links $\overline{n}_l$. Berechnen Sie damit schließlich die mittlere Nettobewegung $\overline{m} = \overline{n}_r - \overline{n}_l$.
(Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang $np^n = p\frac{\partial(p^n)}{\partial p}$ und die Tatsache, dass $p + q = 1$ sowie nach dem Binomial-Theorem $\sum_{n_r=0}^{N} W(n_r) = (p+q)^N$ ist.)
(ii) Berechnen Sie nun in analoger Vorgehensweise die Größe $\overline{n_r^2} = \sum_{n_r=0}^{N} n_r^2 W(n_r)$, und damit dann die Varianz der Wahrscheinlichkeit, dass der Seemann n_r Schritte nach rechts macht, d.h. die Größe: $\overline{(\Delta n_r)^2} = \overline{(n_r - \overline{n}_r)^2}$.
(iii) Wie ergibt sich daraus die Varianz der Nettobewegung $\overline{(\Delta m)^2} = \overline{(m - \overline{m})^2}$?
Wie lautet $\overline{(\Delta m)^2}$ für einen vollkommen betrunkenen Seemann, bei dem gilt: $p = q = \frac{1}{2}$?
(Hinweis: mit $n_r + n_l = N$ ist $m = n_r - n_l = 2n_r - N$; zeigen Sie damit zunächst, dass $\Delta m = m - \overline{m} = 2\Delta n_r$ ist.)

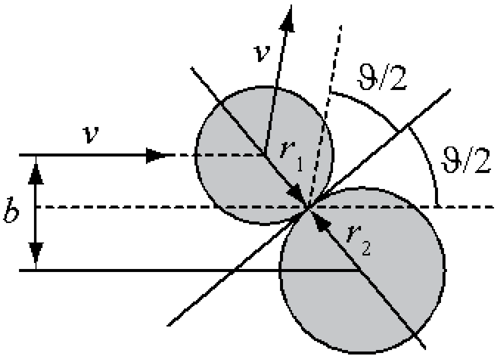
(b) Wenden Sie die Ergebnisse aus (a) auf die Streuung von α-Teilchen nach dem Thomsonschen Atommodell an. Berechnen Sie als vorbereitenden Schritt zunächst mit der Formel aus der Vorlesung den mittleren Steuwinkel $\overline{\vartheta}$ bei Streuung eines α-Teilchens der Energie $\mathrm{E_{kin}} = 5\,\mathrm{MeV}$ an einem einzelnen Goldatom (Radius der Goldatome R $\approx$ 0,1 nm, Z_{Gold} = 79). Bestimmen Sie damit dann die Breite (d.h. die Standartabweichung) der Streuwinkelverteilung nach Durchdringen einer 10 μm dicken Goldfolie.

3) Rutherford-Streuung und Wirkungsquerschnitt

Wir führen ein Rutherford-Streuexperiment durch, bei dem $\alpha-$Teilchen mit der kinetischen Energie $\mathrm{E_{kin}} = 5\,\mathrm{MeV}$ auf eine Goldfolie geschossen werden. Die Dicke der Goldfolie betrage $\mathrm{D} = 5\,\mu\mathrm{m}$, ihre Dichte sei $\rho = 19,3\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Das Molvolumen von Gold ist $\mathrm{V_{mol}} = 10,19\,\mathrm{cm}^3$.
(a) Wie groß ist der Stoßparameter b bei den Streuwinkeln $\theta = 10°, 45°$ und $90°$?
(b) Wie groß ist der minimale Abstand r_{min} des Projektils von einem Goldkern für Rückwärtsstreuung, also bei einem Streuwinkel von $\theta = 180°$?
(c) Welcher Bruchteil aller α - Teilchen wird in den Winkelbereich $45° \leq \theta \leq 90°$ gestreut ?
(d) Der Strahl aus $\alpha-$Teilchen habe eine Intensität von $I = 2.5 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$. Die gestreuten Teilchen werden mit einem Detektor (aktive Fläche 4x4 cm^2) in $2\,\mathrm{m}$ Abstand nachgewiesen. Berechnen Sie die Zählrate für die Streuwinkel $\theta = 1°, 5°, 15°, 25°$ und $35°$. Sie können dazu annehmen, dass sich der Wirkungsquerschnitt über die Fläche des Detektors nicht ändert.
(e) Vergleichen Sie nun den Abfall der erwarteten Zählraten mit dem Streuwinkel für das Atommodell nach Rutherford bzw. nach Thomson. Betrachten Sie dazu das jeweilige Verhältnis der Raten bei den Streuwinkeln $\theta = 1°$ und $\theta = 5°$ unter der Annahme, dass der Detektor eine Winkelauflösung von $\pm 0.5°$ besitzt. Mit welcher experimentellen Signatur ist das Thomsonsche Atommodell also einfach vom Rutherfordschen Atommodell zu unterscheiden?

4) Streuung und Wirkungsquerschnitt

Betrachten Sie den reibungsfreien, elastischen Stoß zwischen zwei harten Kugeln. Nehmen Sie dazu an, dass eine Kugel mit Radius r_1 und Geschwindigkeit v an einer unbeweglichen Kugel mit Radius r_2 gestreut wird.
(a) Berechnen Sie den Ablenkwinkel ϑ als Funktion des Stoßparameters b (s. Skizze).



(b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.
(c) Bestimmen Sie den integralen Wirkungsquerschnitt und interpretieren sie das Ergebnis.
(Hinweis: $\sin(x) = 2 \cdot \sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$)