

# EP-4 Atom- und Molekülphysik Universität Erlangen–Nürnberg SS 2017

## Übungsblatt 2 (12.05.2017)

Vorlesungen: Mi 10.15 - 11.55 und gegebenenfalls Fr, 08:15 - 09:55 HE

Übungen: Freitag 10 - 12, SR 00.103, SR 00.732, SR 01.332, SR 01.779, SR 02.729, SRLP 0.179

Webpage der Vorlesung: [www.qoqi.nat.fau.de](http://www.qoqi.nat.fau.de) → "teaching"

---

### 1) Van-der-Waals Gas

Die Zustandsgleichung für 1 mol eines van-der-Waals Gases lautet

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

Diese Gleichung beschreibt das Verhalten realer Gase, bei denen die Wechselwirkung zwischen den Teilchen und deren Eigenvolumen nicht mehr vernachlässigbar sind. Hierbei sind  $a$  und  $b$  materialabhängige Konstanten.

**(a)** Was ist die physikalische Bedeutung der Konstanten  $a$  und  $b$ ? (Dimensionsbetrachtung!)

**(b)** Bei  $p_c$ ,  $V_c$  und  $T_c$  (kritischer Druck, kritisches Volumen, kritische Temperatur) besitzt die Zustandsgleichung  $p = p(V, T)$  einen Sattelpunkt. Zeichnen Sie die  $T = T_c$  van-der-Waals Isotherme in einem  $pV$ -Diagramm. Zeichnen Sie eine van-der-Waals Isotherme im  $pV$ -Diagramm für Temperaturen  $T$  unterhalb und oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$ .

**(c)** Drücken Sie die Konstanten  $a$  und  $b$  als Funktion von  $p_c$ ,  $V_c$  und  $T_c$  aus. Berücksichtigen Sie dabei die Tatsache, dass die Zustandsgleichung  $p = p(V, T)$  bei  $p_c = p_c(V_c, T_c)$  einen Sattelpunkt aufweist.

**(d)** Zwei verschiedene van-der-Waals Gase besitzen folgende kritische Drücke und Temperaturen:

Gas 1:  $p_c = 50,6$  bar,  $T_c = 155$  K

Gas 2:  $p_c = 77,1$  bar,  $T_c = 417$  K

Berechnen Sie daraus die van-der-Waals Konstanten  $a$  und  $b$  für die beiden Gase.

Ermitteln Sie die Atomradien der Gasatome unter der Annahme, dass bei  $V_c$  die Gasteilchen dicht gepackt sind und es sich um kugelförmige Atome handelt.

### 2) Ficksches Gesetz in 1D

In dieser Aufgabe wollen wir das erste Ficksche Gesetz für den eindimensionalen Fall herleiten:

$$j_x = -D \frac{dC(x)}{dx},$$

wobei  $j_x$  die Teilchenstromdichte,  $D$  die Diffusionskonstante und  $C(x)$  die Teilchendichte (*particle concentration*) am Ort  $x$  bezeichnet.

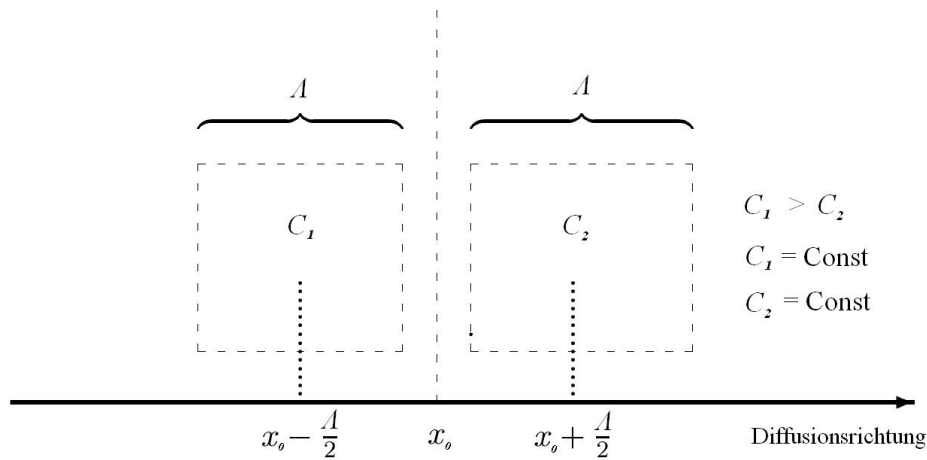


Abbildung 1: Skizze zur Teilchendiffusion

(*Hinweis:* Lösen Sie das Problem unter Verwendung von Abbildung 1. Hierin ist bei  $x_0$  eine gedachte Ebene eingezeichnet, durch die Teilchen von der linken Seite der Ebene aus dem eingezeichneten Volumen der Größe  $V_l = \Lambda \cdot A$  und Teilchen von der rechten Seite der Ebene aus einem gleichgroßen Volumen  $V_r$  hindurchströmen.  $A$  ist hierbei die Einheitsfläche und  $\Lambda = \bar{v}_x \cdot \tau$  die mittlere freie Weglänge der Teilchen, mit  $\bar{v}_x$  und  $\tau$  der mittleren Geschwindigkeit in x-Richtung bzw. der mittleren Stoßzeit.

(a) Wieviele Teilchen strömen von der linken Seite der Ebene aus dem eingezeichneten Volumen  $V_l$  durch die Ebene bei  $x_0$  und wieviele von der rechten Seite der Ebene aus dem eingezeichneten Volumen  $V_r$ . Wie groß ist also der Netto-Strom der Teilchen (Anzahl der Teilchen pro Zeit und Fläche) durch die Ebene. Nehmen Sie die Teilchendichten  $C_1$  und  $C_2$  innerhab der Volumina  $V_l$  und  $V_r$  als konstant an.

(b) Leiten Sie mit Hilfe von (a) das erste Ficksche Gesetz und damit einen Ausdruck für die Diffusionskonstante  $D$  her.

### 3) Lenard-Jones Potential

Wie in der Vorlesung behandelt, können die Atomradien mit unterschiedlichen Methoden bestimmt werden. Die verschiedenen Methoden ergeben in etwa die gleiche Größenordnung, aber dennoch im Detail unterschiedliche Werte. Das liegt an der Schwierigkeit einer genauen Definition des Atomradius. Denn anders als bei einer starren Kugel ist der Radius eines realen Atoms nicht präzise definiert: Atome haben eine weitreichende Wechselwirkung, die aus einem attraktiven und einem repulsiven Teil besteht.

Die Wechselwirkung zwischen zwei ungeladenen, sphärischen Atomen lässt sich näherungsweise mit dem Lennard-Jones Paarpotential ("6-12-Potential") beschreiben:

$$V(r) = \left( \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6} \right) = 4\varepsilon \left( \frac{\sigma^{12}}{r^{12}} - \frac{\sigma^6}{r^6} \right)$$

Dabei ist  $r$  der Abstand zwischen den Kernen der Atome,  $\sigma$  der Abstand, an dem das Potential einen Nulldurchgang besitzt und  $\varepsilon$  das Potentialminimum. Der attraktive Teil ( $\propto r^{-6}$ ) beschreibt die anziehende van-der-Waals Wechselwirkung, der repulsive Teil die Abstoßung der Atome aufgrund der Pauli-Repulsion.

(a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum des Potentials an der Stelle  $r_m \approx 1,12\sigma$  befindet und drücken Sie  $r_m$  als Funktion von  $a$  und  $b$  aus.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials  $V(r)$  als Funktion von  $r$ .

(c) Die Konstanten  $a$  und  $b$  seien gegeben durch  $a = 10^{-134} \text{ J m}^{12}$  und  $b = 10^{-77} \text{ J m}^6$ . Wie tief liegt das Potentialminimum in Einheiten von  $k_B T$  bei Raumtemperatur?

#### 4) Astonsches Massenspektrometer

Bei dem in der Vorlesung besprochenen Thompsonschen Massenspektrographen durchlaufen geladene Teilchen gleichzeitig ein elektrisches Feld  $E$  und ein dazu paralleles Feld  $B$ . Dadurch verteilen sich die Auftreffpunkte auf der Photoplatte von Teilchen mit gleichem Verhältnis von Masse zu Ladung  $q/m$  aber unterschiedlicher Geschwindigkeit entlang einer charakteristischen Parabel. Um die Intensität und damit die Nachweisempfindlichkeit zu erhöhen, ist es wünschenswert, alle Teilchen mit gleichem  $q/m$  unabhängig von ihrer kinetischen Energie auf einen Punkt zu fokussieren. Dies gelang mit dem Massenspektrographen nach Aston (1919). Bei diesem werden die Ionen (Eintrittsgeschwindigkeit  $v = v_z$ ) zuerst durch einen Plattenkondensator der Länge  $L_1$  (mit elektrischer Feldstärke  $E$ ) um den Winkel  $\alpha$  abgelenkt. Danach durchlaufen sie ein Paar von Helmholtzspulen vom Durchmesser  $L_2$  (mit magnetischer Feldstärke  $B$ ,  $B \perp E$  und  $B \perp v$ ), wodurch eine zusätzliche Ablenkung um den Winkel  $\beta$  in die entgegengesetzte Richtung erfolgt (siehe Abb. 2). Es kann dabei davon ausgegangen werden, dass  $E$ - und  $B$ -Feld nur innerhalb des Kondensators bzw. der Spulen wirken.

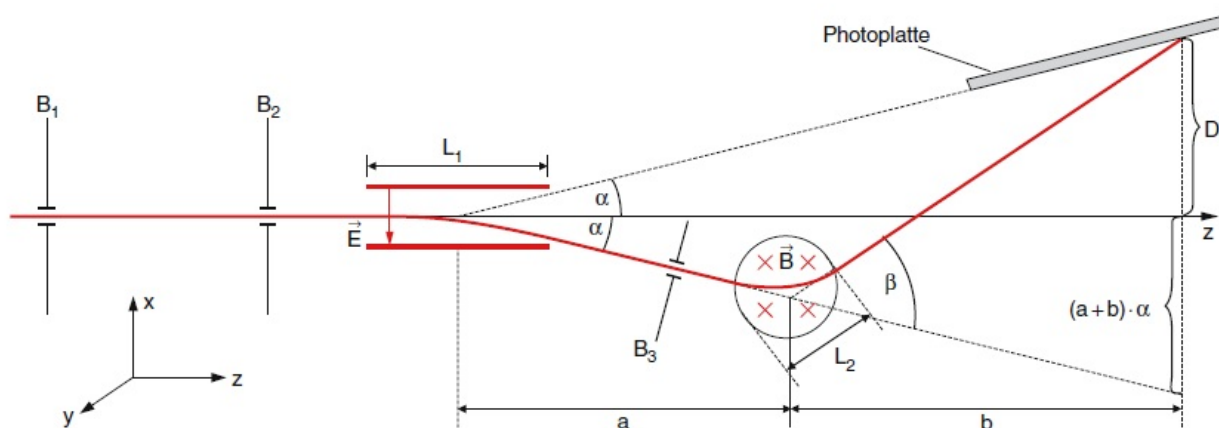


Abbildung 2: Skizze des Astonschen Massenspektrometers

(a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Ablenkwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  in Abhängigkeit der Länge des Kondensators  $L_1$  und des Spulendurchmessers  $L_2$  ab. Wie hängen die Winkel jeweils von der Teilchengeschwindigkeit  $v$  ab.

(b) Berechnen Sie die Gesamtablenkung  $D$  der Ionen von der  $z$ -Achse. Sie können dazu annehmen, dass die auftretenden Ablenkwinkel klein sind.